© www.mathe-total.de

Nullstellen

Aufgabe 1

Bestimme die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^3 – 2x^2 – 8x = 0$$

Lösung:

Hier kann man x ausklammern:

$$x(x^2 – 2x – 8) = 0$$

Da ein Produkt Null ist, wenn ein Faktor gleich Null ist, kann man die Faktoren Null setzen. Damit hat man die erste Nullstelle $x_1 = 0$ schon gefunden, die beiden anderen erhält man über:

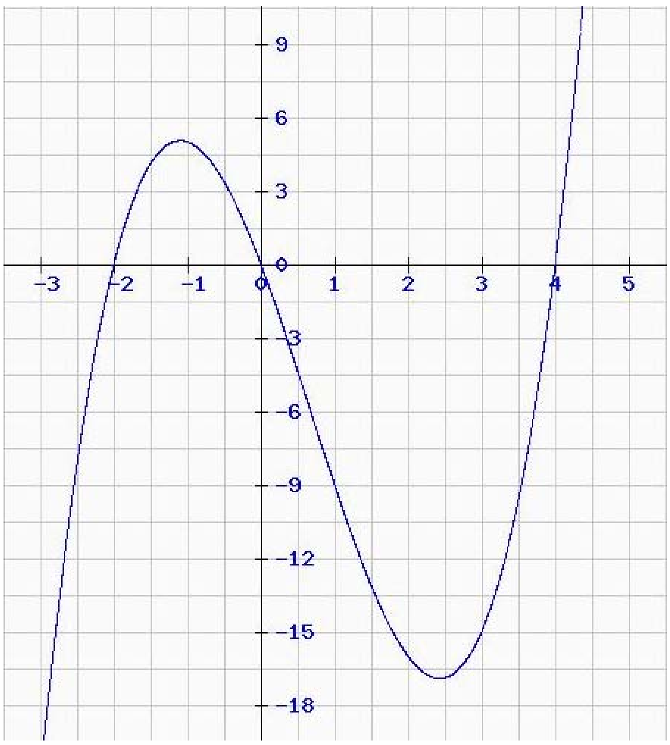
$$x^2 – 2x – 8 = 0$$

Mit der p-q-Formel (siehe http://www.mathe-total.de/Mittelstufe-Aufgaben/Parabeln.pdf, Seite 8) ergibt sich $x_2 = 4$ und $x_3 = -2$.

Man kann die obige Funktion nun sogar wie folgt darstellen:

$$f(x) = (x – x_1)\,(x – x_2)\,(x – x_3) = x(x – 4)(x + 2)$$

Wenn also eine Funktion wie oben gegeben ist (d.h. in Linearfaktoren zerlegt) und man die Nullstellen bestimmen soll, dann kann man diese einfach ablesen und sollte diese Gleichung nicht ausmultiplizieren.



© www.mathe-total.de

Aufgabe 2

Bestimme die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

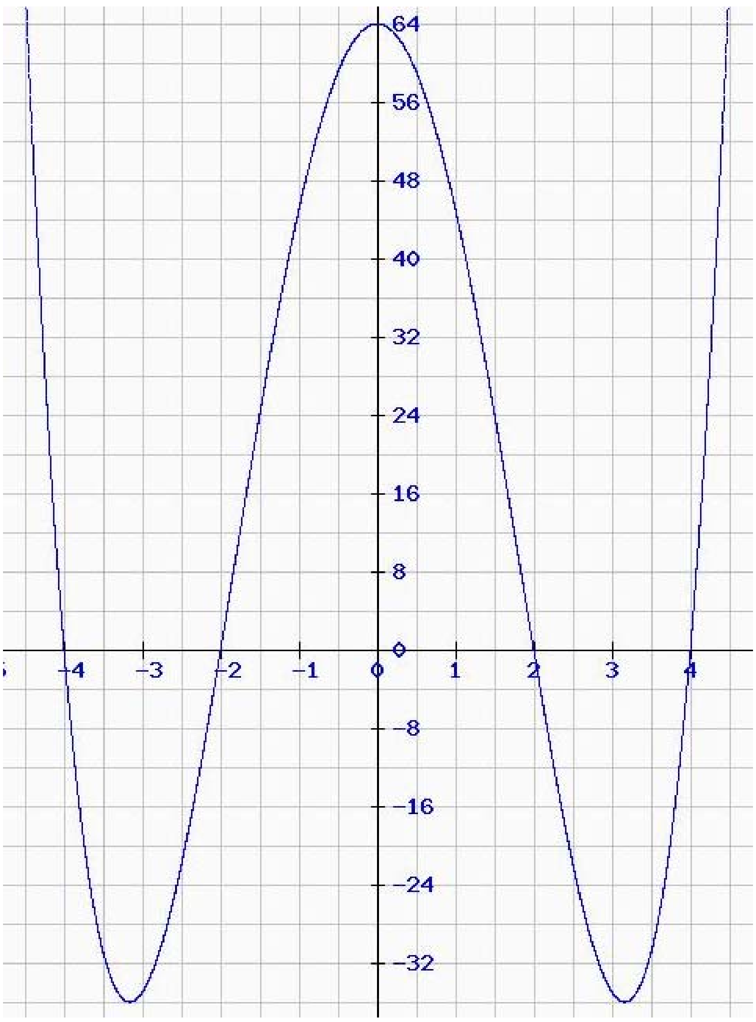
Dies ist eine so genannte biquadratische Gleichung. Bei diesem Typ von Gleichung kann man $x^2 = z$ setzen (bzw. substituieren). Damit wäre $x^4 = z^2$:

$$z^2 - 20z + 64 = 0$$

Mit der p-q-Formel erhält man $z_1 = 4$ und $z_2 = 16$. Nun muss man zurücksubstituieren und man erhält:

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm 2 \quad \text{und} \quad x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm 4\,.$$

Eine Gleichung 4-ten Grades kann somit 4 Lösungen haben, wie allgemein eine ganzrationale Funktion n-ten Grades n Nullstellen haben kann. Wäre z.B. $z_2 < 0$ gewesen, so hätten wir nur zwei Lösungen gehabt.



© www.mathe-total.de

Aufgabe 3

Bestimme die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

Lösung

Für diese Gleichung verwenden wir nun die Polynomdivision. Dazu muss man die erste Nullstelle raten. Wenn diese Gleichung 3 Lösungen x_1, x_2 und x_3 hat, so gilt $8 = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Somit sind die Nullstellen allgemein Teiler der Konstanten a_0, wobei diese Information nur einen Vorteil bringt, wenn die Nullstellen ganzzahlig sind.

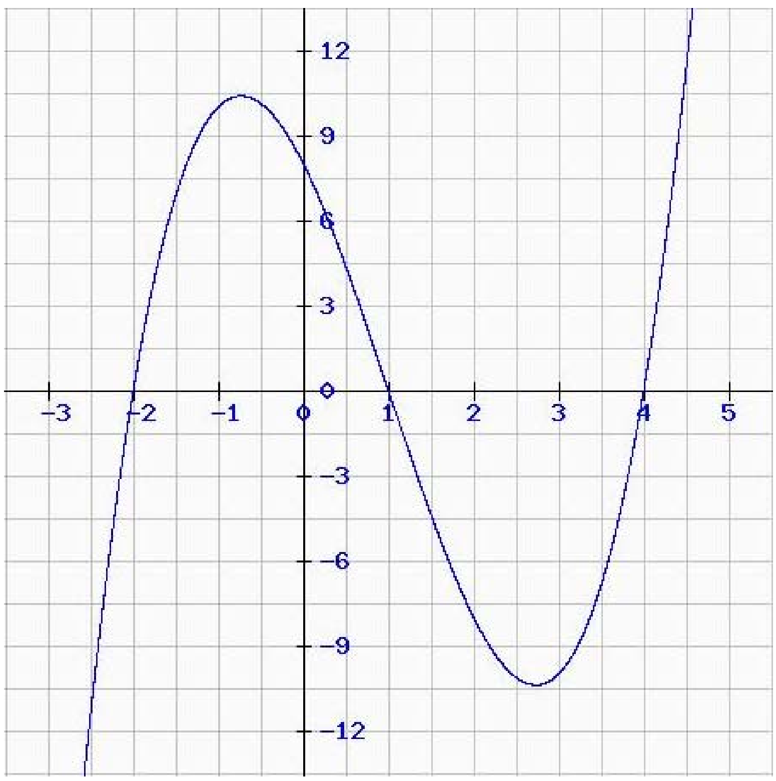
Wir probieren es mit der 1: $f(1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$.
Somit ist $x_1 = 1$. Da man eine ganzrationale Funktion in Linearfaktoren zerlegen kann (sofern sie n Nullstellen besitzt) und man $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$ schreiben kann, wenn man eine Nullstelle der ganzrationalen Funktion f kennt, dividiert man die Funktion durch $(x - x_1)$:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 1) = x^2 - 2x - 8 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -2x^2 - 6x \\
\quad \underline{-(-2x^2 + 2x)} \\
\qquad -8x + 8 \\
\qquad \underline{-(-8x + 8)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Die restlichen Nullstellen erhält man durch:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

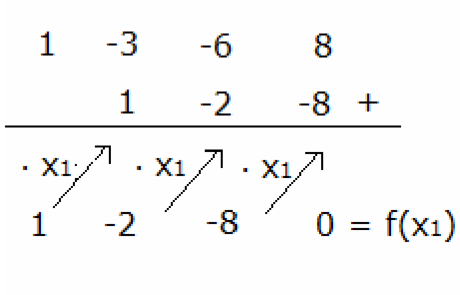
Mit der p-q-Formel ergibt sich $x_2 = -2$ und $x_3 = 4$.



© www.mathe-total.de

Bemerkung:
Statt der Polynomdivision kann man auch das Hornerschema verwenden, was aber seltener an Schulen verwendet wird.

In Aufgabe 3 war $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ und in der Lösung hatten wir $x_1 = 1$ gefunden. Möchte man das Hornerschema verwenden, muss man die Koeffizienten des Polynoms in einer Zeile notieren. Danach lässt man eine Zeile frei, zieht eine Linie (siehe Grafik) und schreibt den höchsten Koeffizient nach unten unter die Linie. Dieser wird dann mit der gefundenen Nullstelle multipliziert und unter den zweiten Koeffizient über die Linie geschrieben. Danach wird der zweite Koeffizient mit dieser Zahl addiert und dass Ergebnis unter den Strich geschrieben. Dies wird bis zum letzten Koeffizient durchgeführt.



Unter der Linie sehen Sie dann die Koeffizienten des Polynoms, welches sich durch die Polynomdivision ergibt. Der letzte Wert in der dritten Zeile ist eine Null und gleich dem Funktionswert an der Stelle $x = x_1$. Somit ergibt sich auch über das Hoernerschema

$$(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 1) = x^2 - 2x - 8$$