Extrempunkte berechnen

Gesucht sind die Lage und Arten der Extrempunkt folgender Funktionen:

1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$

3) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 22$

4) $f(x) = x^3 - 12a^2x$; $a > 0$

Lösung:

1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
$f''(x) = 6x - 18$

Notwendige Bedingung:

$f'(x) = 0$
$3x^2 - 18x + 24 = 0 \mid :3$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$
$= 3 \pm 1$
$x_1 = 4;\ x_2 = 2$

Liegt ein HP/TP oder ein Sattelpunkt vor ?

In f''(x) einsetzen:

$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0 \Rightarrow$ TP
$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow$ HP

Funktionswerte von y -Werte berechnen:

$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 14 = 2$
$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 14 = 6$

Also: $E_1(4;\ 2)$ ist TP und $E_2(2;\ 6)$ ist HP.

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 6$
$f'(x) = 2x^3 - 8x$
$f''(x) = 6x^2 - 8$

Notwendige Bedingungen:

$f'(x) = 0$
$2x^3 - 8x = 0 \mid :2$
$x^3 - 4x = 0$
$x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$
$x^2 - 4 = 0 \mid +4$
$x^2 = 4 \mid \sqrt{}$

$x_{2/3} = \pm 2$

Die Extrempunkte liegen spiegelsymmetrische zur y-Achse, da f zu dieser symmetrisch ist.
In f''(x) einsetzen:

$f''(0) = 6 \cdot 0^2 - 8 = -8 < 0 \Rightarrow$ HP
$f''(2) = 6 \cdot 2^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow$ TP

bei $x_3 = -2$ muss wegen der Symmetrie zur y-Achse durch ein TP vorliegen.

Funktionswerte berechnen:

$f(0) = 6 \Rightarrow E_1(0; 6)$ ist HP

$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 6 = -2 \Rightarrow E_2(2; -2)$ ist TP und $E_3(-2; -2)$ ist auch ein TP.

3) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 22$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 27$

$f''(x) = 6x - 18$

$f'''(x) = 6$

Notwendige Bedingungen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 27 = 0 \quad | :3$

$x^2 - 6 + 9 = 0$

$x_{1/2} = 3 \pm\sqrt{9-9}$

$= 3$ (Hinweis auf Sattelpunkt, wenn erste Ableitung doppelte Nullstelle hat)

In $f''(x)$ einsetzen:

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 18 = 0$

Jetzt muss man in $f'''(x)$ einsetzen:

$f'''(x) = 6 \neq 0$

Da $f''(3) = 0$ und $f'''(3) \neq 0$ ist, liegt an der Stelle $x = 3$ ein WP vor. Da auch $f'(3) = 0$ ist (wir hatten oben $f'(x) = 0$ nach x aufgelöst und $x = 3$ als Lösung erhalten), handelt es sich nun einen Sattelpunkt (= Wendepunkt mit waagerechter Tangente).

Funktionswerte berechnen:

$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 - 22 = 5$

S(3; 5) ist Sattelpunkte.

4) $f(x) = x^3 - 12a^2x$ mit $a > 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 12a^2$

$f''(x) = 6x$

Notwendige Bedingungen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12a^2 = 0 \quad | + 12a^2$

$3x^2 = 12a^2 \quad |:3$

$x^2 = 4a^2 \quad |\sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm 2a$

In $f''(x)$ einsetzen:

$f''(2a) = 6 \cdot 2a = 12a > 0$, da $a > 0 \Rightarrow$ TP

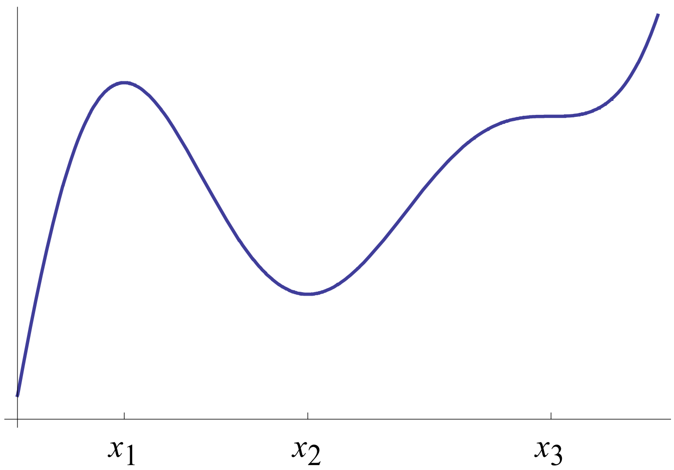
$f''(-2a) = 6 \cdot (-2a) = -12a < 0$, da $a > 0 \Rightarrow$ HP

In f(x) einsetzen:

$f(2a) = (2a)^3 - 12a^2 \cdot 2a$
$= 8a^3 - 24a^3 = -16a^3$
$f(-2a) = (-2a)^3 - 12a^2 \cdot (-2a) = 16a^3$ (klar wegen Punktsymmetrie zum Ursprung)

⇨ $E_1(2a; -16a^3)$ ist TP
$E_2(-2a; 16a^3)$ ist HP

Bemerkung:
Die Skizze zeigt eine Funktion mit HP (=Hochpunkt) bei x_1, TP bei x_2 und Sattelpunkt bei x_3.



Zu dem obigen Graph passen folgende Bedingungen:

$f'(x_1) = 0$
$f''(x_1) < 0$ (da hier ein HP vorliegt)

$f'(x_2) = 0$
$f''(x_2) > 0$ (da hier ein TP vorliegt)

$f'(x_3) = 0$
$f''(x_3) = 0$ und $f'''(x_3) \neq 0$, bei $x = x_3$ liegt ein Sattelpunkt vor.