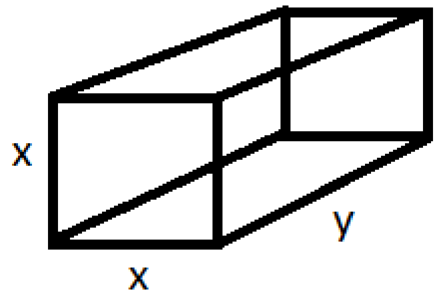
Extremwertaufgaben

1) Eine quaderförmige Schachtel mit quadratischer Grundfläche und einer einem Volumen von 4 Litern soll eine minimale Oberfläche haben (1 Liter = 1000 cm^3). Die quadratische Vorderseite der Schachtel soll offen sein. Wie müssen die Maße gewählt werden und wie groß ist die minimale Oberfläche?

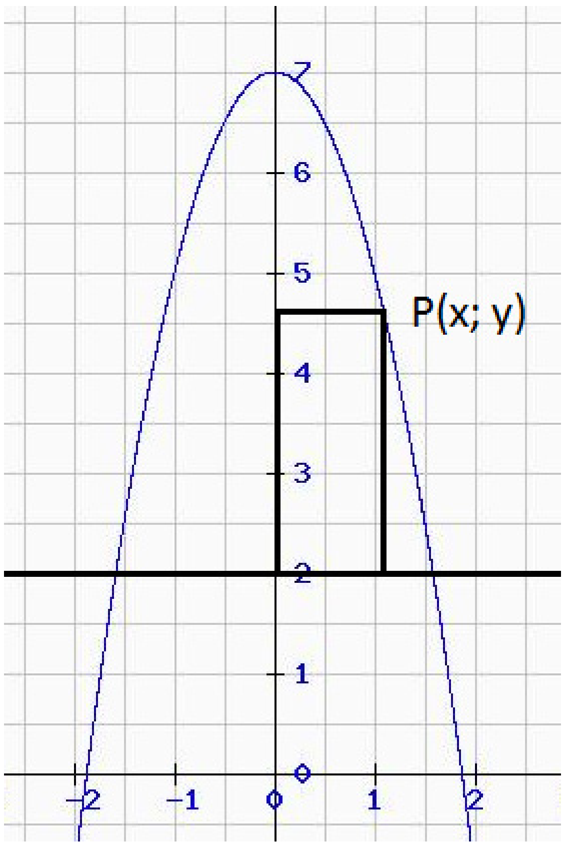


2) Wie müssen die Koordinaten des Punkts P(x; y) auf der Kurve von $f(x) = -2x^2 + 7$ gewählt werden, damit das achsenparallele Rechteck in der Zeichnung unten

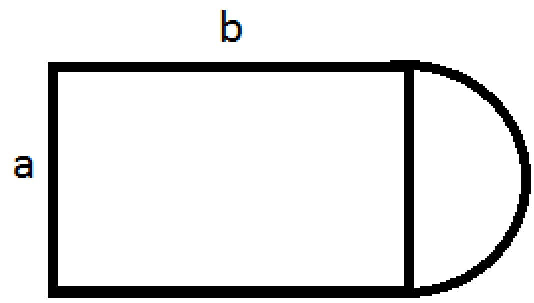
a) eine maximale Fläche

b) einen maximalen Umfang

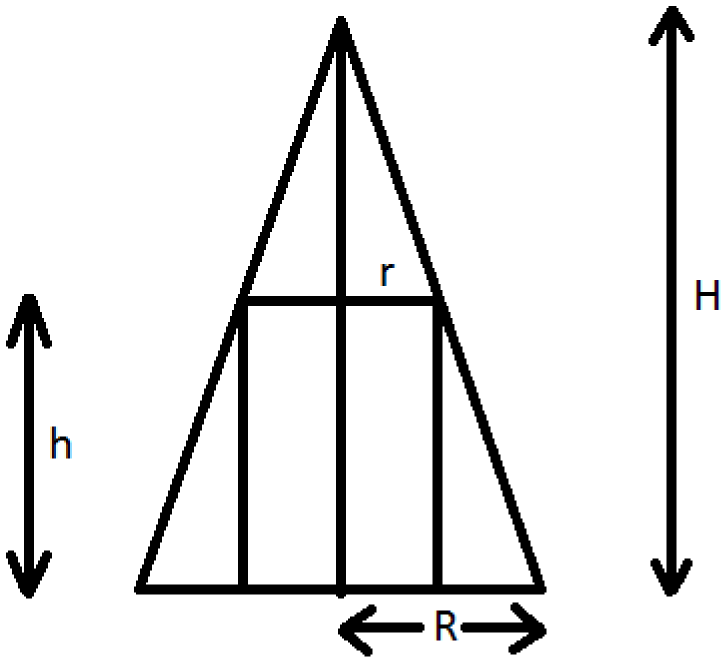
hat?



3) Der Umfang des Feldes unten soll 400 m betragen. Wie müssen die Maße a und b des Rechtecks gewählt werden, damit dieses Rechteck eine maximale Fläche besitzt:



4) In einen Kegel mit der Höhe H = 10 cm und dem Radius R = 6 cm soll ein auf der Grundfläche stehender Zylinder mit maximalem Volumen gesetzt werden. Wie müssen die Maße des Zylinders gewählt werden (unten ist der Querschnitt zu sehen)?



Tipp: Strahlensatz: (H – h)/H = r/R

Lösungen:

1) Das Volumen ergibt sich durch $V = x^2 \cdot y$ und die Oberfläche besteht aus dem Einfachen (da vorne offen) der Grundfläche, also x^2 und den 4 rechteckigen Seitenflächen mit den Maßen x und y, womit für die Oberfläche $O = x^2 + 4xy$ gilt. Damit ergibt sich folgendes:

$$\text{min. } O = x^2 + 4xy$$
$$\text{NB: } x^2 \cdot y = 4000$$

Wir lösen die NB nach y auf ($y = 4000/x^2$ (1)) und setzen diese in die Zielfunktion ein:

$$O = x^2 + 4x \cdot 4000/x^2 = x^2 + 16000/x$$

Damit müssen wir den Tiefpunkt von $O(x) = x^2 + 16000x^{-1}$ bestimmen ($1/x = x^{-1}$).

$$O'(x) = 2x - 16000x^{-2}$$
$$O''(x) = 2 + 32000x^{-3}$$

$$O'(x) = 2x - 16000x^{-2} = 0 \quad | \cdot x^2$$

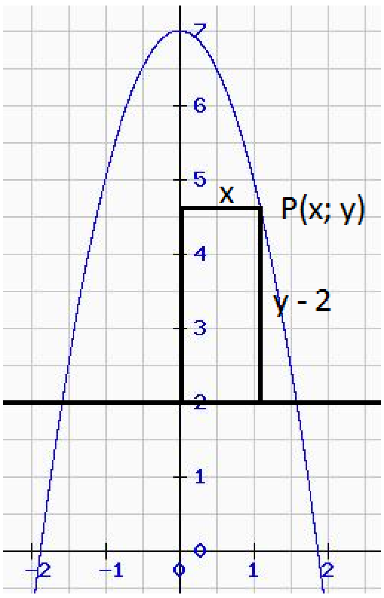
$$4x^3 - 16000 = 0$$
$$x^3 = 8000$$

Also ist $x = \sqrt[3]{8000} = 20$. $O''(20) = 6 > 0$, also minimal. Es gilt außerdem $O(20) = 1200$.

$x = 20$ können wir in die nach y aufgelöste NB setzen (in (1)): $y = 4000/20^2 = 10$

Damit hat der Quader die minimale Oberfläche von $O = 1200\ \text{cm}^2$, für $x = 20$ cm und $y = 10$ cm.

2)



a) Die Fläche des Quadrates beträgt $A = x \cdot (y-2)$, da die untere Seite x lang ist und die in der Abbildung senkrechte Seite y - 2 lang ist. Die Nebenbedingung (NB) ist $y = f(x) = -2x^2 + 7$.

$$\text{min. } A = x \cdot (y-2)$$
$$\text{NB: } \quad y = -2x^2 + 7$$

Wir setzen die NB in die Zielfunktion ein:

$$A(x) = x \cdot (-2x^2 + 7 - 2) = -2x^3 + 5x$$

$$A'(x) = -6x^2 + 5$$
$$A''(x) = -12x$$

$A'(x) = 0$ ergibt $x_{1/2} = \pm\sqrt{5/6}$. Da x positiv sein muss, gilt $x = \sqrt{5/6} \approx 0{,}913$.
Es ergibt sich $A''(\sqrt{5/6}) = -12 \cdot \sqrt{5/6} < 0$, also maximale Fläche.

Den Wert für y erhalten wir, wenn wir $x = \sqrt{5/6}$ in die NB einsetzen: $y = 16/3$.

Damit sind die Maße $x \approx 0{,}913$ cm und $y = 16/3$ cm.

b) Die Oberfläche des Quadrates beträgt $O = 2x + 2(y-2)$ und die NB ist wie bei a) $y = -2x^2 + 7$

$$\text{min. } O = 2x + 2(y-2)$$
$$\text{NB: } \quad y = -2x^2 + 7$$

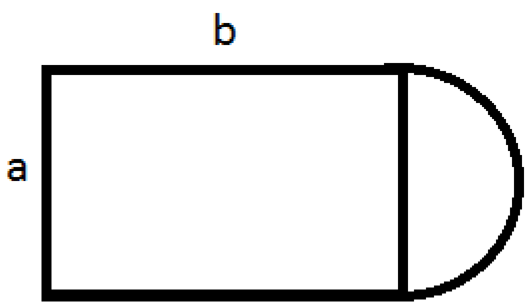
Wir setzen die NB in die Zielfunktion ein:

$$O(x) = 2x + 2(y-2) = 2x + 2(-2x^2 + 7 - 2) = -4x^2 + 2x + 10$$

$$O'(x) = -8x + 2$$
$$O''(x) = -8$$

$O'(x) = 0$ ergibt $x = 1/4$ und $O''(1/4) = -8 < 0$, also maximale Oberfläche. $x = 1/4$ in die NB eingesetzt ergibt $y = 55/8$. Damit ergibt sich der Punkt $P(1/4; 55/8) = P(0{,}25; 6{,}875)$

3)



Die Gesamtfläche besteht aus einem Rechteck mit den Maßen a und b und einem Halbkreis mit dem Radius $r = 1/2 \cdot a$. Der Umfang der Gesamtfläche wäre dann $U = 2b + a + 1/2 \cdot U_{Kreis}$ mit $U_{Kreis} = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot a$

.

Also ergibt sich das Extremwertproblem:

$$\max.\ A = a \cdot b$$
$$\text{NB: } 2b + a + 1/2 \cdot \pi \cdot a = 400$$

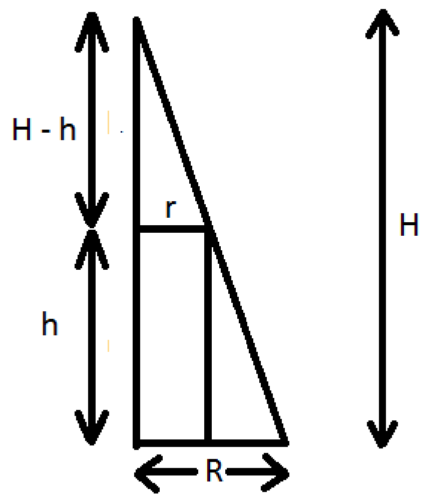
Wir lösen die NB nach b auf: $b = 200 - 1/2 \cdot a - 1/4 \cdot \pi \cdot a$ (1)
Dies in die Zielfunktion eingesetzt ergibt: $A(a) = a \cdot (200 - 1/2 \cdot a - 1/4 \cdot \pi \cdot a) = 200a - 1/2 \cdot a^2 - 1/4 \cdot \pi \cdot a^2$
(Oder $A(a) = 200a - (1/2 + \pi/4) \cdot a^2$)

$$A'(a) = 200 - a - 1/2 \cdot \pi \cdot a = 200 - (1 + \pi/2) \cdot a$$

$$A''(a) = -1 - 1/2 \cdot \pi$$

$A'(a) = 0$ nach a aufgelöst ergibt $a = 200/(1 + 1/2 \cdot \pi) \approx 77{,}797$. $A''(200/(1 + 1/2 \cdot \pi)) = -1 - 1/2 \cdot \pi < 0$, also maximal. $a = 200/(1 + 1/2 \cdot \pi)$ können wir in die nach b aufgelöste NB (1) einsetzen: $b = 100$. Damit wären die Maße $a = 200/(1 + 1/2 \cdot \pi)$ m $\approx 77{,}797$ m und $b = 100$ m.

4) Strahlensatz: $(H - h)/H = r/R$



Anstelle des Strahlensatzes könnte auch eine Geradengleichung verwendet werden. Es gilt: $h(r) = m \cdot r + H$ und $h(R) = m \cdot R + H = 0$, womit sich die Steigung $m = -H/R$ ergibt und somit

$$h = -H/R \cdot r + H \quad \text{bzw. umgeformt } (H - h)/H = r/R$$

gilt. Wir haben noch die Angaben: $H = 10$ cm und $R = 6$ cm. Es ergibt sich das folgende Extremwertproblem:

$$\max.\ V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$\text{NB: } (10 - h)/10 = r/6$$

Wir lösen die NB nach r auf: $r = 6 \cdot (10 - h)/10 = 6 - 0{,}6 \cdot h$ (1)

Die kann in die Zielfunktion eingesetzt werden:

$$V(h) = (6 - 0{,}6 \cdot h)^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$= \pi \cdot (0{,}36 \cdot h^3 - 7{,}2 \cdot h^2 + 36 \cdot h) = \pi \cdot (9/25 \cdot h^3 - 36/5 \cdot h^2 + 36 \cdot h)$$

$$V'(h) = \pi \cdot (1{,}08 \cdot h^2 - 14{,}4 \cdot h + 36) = \pi \cdot (27/25 \cdot h^2 - 72/5 \cdot h + 36)$$
$$V''(h) = \pi \cdot (2.16 \cdot h - 14{,}4) = \pi \cdot (54/25 \cdot h - 72/5)$$

$V'(h) = 0 \Leftrightarrow 9/25 \cdot h^2 - 36/5 \cdot h + 36 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 40/3 \cdot h + 100/3 = 0$

Es ergibt sich $h_1 = 10$ und $h_2 = 10/3$.

$V''(10) = 36/5 \cdot \pi > 0$, also minimal.
$V''(10/3) = -36/5 \cdot \pi < 0$, also maximal.

Damit ist $h = 10/3$, was wir in die nach r aufgelöste NB (1) einsetzen können: $r = 4$. Damit ergeben sich die Maße $h = 10/3$ cm und $r = 4$ cm.