Aufgaben zu Parabeln

1) $f(x) = -2 \cdot (x+4)^2 + 18$

a) Gesucht wird die Polynomform ($f(x) = ax^2 + bx + c$) und die Linearfaktorform ($f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)$).

b) Liegt der Punkt P(1/-32) auf der Parabel?

c) Gesucht werden: Schnittpunkte mit y-Achse und x-Achse.

2) $f(x) = -1/2x^2 + 4x + 6$

a) Scheitelform und Scheitelpunkt gesucht.

b) Nullstellen gesucht. Was kann zur Form der Parabel gesagt werden?

3) Wie lautet die Gleichung der Parabel, die

a) die Form der Normalparabel hat und $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$ als Nullstelle?

b) durch $N_1(3/0)$ und $N_2(-2/0)$ verläuft und durch P(4/6)?

c) den Scheitelpunkt S(3/4) hat und durch P(5/-12) verläuft?

d) symmetrisch zur y-Achse ist und durch P(0/9) und Q(-3/0) verläuft?

e) durch $P_1(1/3)$; $P_2(-2/18)$ und $P_3(3/13)$ verläuft?

4) Schnittpunkt von $f(x) = -2x \cdot (x-2)$ und $g(x) = -3 \cdot (x+2)^2 -27$ gesucht.

5) Es werden die Nullstellen folgender Funktionen gesucht:

a) $f(x) = 2x^2 - 6x$

b) $f(x) = -1/2x^2 + 8$

c) $f(x) = 3/7 \cdot (x^2 - 9)$

d) $f(x) = 8/77 \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$

6) Es soll für $f(x) = -3 (x - 4) \cdot (x + 7)$ die Polynomform bestimmt werden.

Lösungen

1)

a) $f(x) = -2 \cdot (x + 4)^2 + 18$

$= -2 \cdot (x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2) + 18$

$= -2 \cdot (x^2 + 8x + 16) + 18$

$= -2x^2 - 16x - 32 + 18$

$= -2x^2 - 16x - 14$ Polynomform

Nullstellen: $-2x^2 - 16x - 14 = 0 \quad |: (-2)$

$x^2 + 8x + 7 = 0$

$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16-7}$

$= -4 \pm 3$

$x_1 = -1;\ x_2 = -7$

Mit Linearfaktoren aufgeschrieben: $f(x) = -2 \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_1) = -2 \cdot (x+1) \cdot (x+7)$

b) $f(1) = -2 \cdot (1 + 4)^2 + 18 = -2 \cdot 25 + 18 = -32 \Rightarrow$ P liegt auf Parabel.

c) Schnittpunkt y-Achse: $f(0) =$ **-14**, könnte sogar einfach abgelesen werden:
$f(x) = -2x^2 - 16x$ **– 14** $\Rightarrow$ Schnittpunkt mit y-Achse ist S(0/-14).

Schnittpunkt mit x-Achse: $N_1(-1/0)$ und $N_2(-7/0)$ (siehe Nullstelle)

2a) 1. Möglichkeit: Es wird wie bei der Bestimmung der Nullstellen vorgegangen und der x-Wert des Scheitelpunktes liegt bei $x_s = -p/2$, mit dem p aus der p-q-Formel, auch wenn keine Nullstellen vorhanden wären.

$\mathbf{-1/2}x^2 + 4x + 6 = 0 \quad |\cdot(-2)$

$x^2 - 8x - 12 = 0$

$x_{1/2} = 4 \pm\sqrt{16+12} = 4 \pm\sqrt{28}$ (-p/2 = 4 = x-Wert Scheitelpunkt)

$x_s = 4$

In f(x) einsetzten:

$f(4) = -1/2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 6$

$= 14$

=> $y_s = 14$ S(4/14) ist der Scheitelpunkt.

$f(x) = \mathbf{-1/2} \cdot (x - 4)^2 + 14$ ist Scheitelform (Scheitelform: $f(x) = a(x-x_s)^2+y_s$, Normalform war $f(x) = ax^2 + bx + c$).

b) Nullstellen: $x_{1/2} = 4 \pm\sqrt{28}$

$x_1 = 4 + \sqrt{28} \approx 9{,}29$; $x_2 = 4 \pm\sqrt{28} \approx -1{,}29$

Die Parabel ist nach unten geöffnet (da $a= -1/2 < 0$) und weiter geöffnet als Normalparabel (da $|a|= |-1/2| = 1/2 < 1$).

2a) 2. Möglichkeit (quadratisch Ergänzung)

$f(x) = \mathbf{-1/2}x^2 + 4x + 6 = 0 \quad | :(-1/2)$
$f(x)/(-1/2) = x^2 - 8x - 12$
$= x^2 - 8x + (8/2)^2 - (8/2)^2 - 12$
$= x^2 - 8x + 16 - 16 - 12$
$= (x - 4)^2 - 16 - 12$

$f(x)/(-1/2) = (x - 4)^2 - 28 \quad |\cdot(-1/2)$

$f(x) = -1/2\cdot(x - 4)^2 + 14$

3)
a) $f(x) = a\cdot(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ a= 1 der Form einer Normalparabel.
$= (x + 3) \cdot (x - 4)$

(Wenn die Polynomform gesucht wäre: ausmultiplizieren $f(x) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12$)

b) $f(x) = a\cdot(x - 3) \cdot (x + 2)$ (da Nullstellen bekannt sind: $f(x) = a\cdot(x - x_1) \cdot (x - x_2)$)

P(4/6) einsetzen (x = 4 und y = 6):

$f(4) = a\cdot (4 - 3) \cdot (4 + 2) = 6$
$= a\cdot 1\cdot 6 = 6$

$6a = 6 \quad | :6$
$a = 1$

$f(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)$

c) $f(x) = a\cdot (x - 3)^2 + 4$ da Scheitelpunkt S(3/4).

$f(5) = a\cdot (5 - 3)^2 + 4 = -12$ (P(5/-12) einsetzen)

$a\cdot 2^2 + 4 = -12$

$4a + 4 = -12 \quad |-4$

$4a = -16$

$a = -4$

$f(x) = -4 \cdot (x - 3)^2 + 4$

d) Symmetrisch zur y-Achse : $f(x) = ax^2 + b$

Nun müssen die Punkte eingesetzt werden (P(0/9) und Q(-3/0)):

$f(0) = a \cdot 0^2 + b = 9 \quad \Leftrightarrow \qquad b = 9 \quad (1)$

$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9a + b = 0 \quad (2)$

(2) in (1) einsetzen (andernfalls Additionsverfahren anwenden):

$9a + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$

$f(x) = -x^2 + 9$

e) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Punkte einsetzten ($P_1(1/3)$; $P_2(-2/18)$ und $P_3(3/13)$):

$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3$

(1) $a + b + c = 3$

$f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b\,(-2) + c = 18$

(2) $4a - 2b + c = 18$

$f(3) = 9a + 3b + c = 13$

(3) $9a + 3b + c = 13$

Wir eliminieren c und subtrahieren: Die Gleichungen: (1) – (2) und (1) – (3)
(alternativ (2) – (3)).

(4) = (1) – (2): $\qquad -3a + 3b = -15 \quad |\cdot 2$

(5) = (1) – (3): $\qquad -8a - 2b = -10 \quad |\cdot 3$

Da wir im nächsten Schritt b eliminieren möchten, multiplizieren wir die Gleichungen entsprechend, dass vor b vom Betrag her derselbe Faktor, nur mit verschiedenen Vorzeichen, steht, damit wir die beiden Gleichungen addieren können:

$-6a + 6b = -30$

$-24a - 6b = -30 \quad (+)$

$-30a = -60 \quad | :(-30)$

$a = 2$

In (4): $-3 \cdot 2 + 3b = -15 \quad | +6$

$3b = -9$

$b = -3$

In (1): $2 - 3 + c = 3$

$-1 + c = 3 \quad | +1$

$c = 4$

Also: $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

4) $f(x) = g(x)$ ($f(x) = -2x \cdot (x-2)$ und $g(x) = -3 \cdot (x+2)^2 -27$)

$-2x \cdot (x - 2) = -3 \cdot (x + 2)^2 - 27$

$-2x^2 + 4x = -3 \cdot (x^2 + 4x + 4) - 27$

$-2x^2 + 4x = -3x^2 - 12x - 12 - 27$

$-2x^2 + 4x = -3x^2 - 12x - 39 \quad |+ 2x^2 - 4x$

$0 = -x^2 - 16x - 39 \quad | : (-1)$

$x^2 + 16x + 39 = 0$

$x_{1/2} = -8 \pm \sqrt{64 - 39}$

$= -8 \pm 5$

$x_1 = -3$; $x_2 = -13$

y-Werte: In f(x) einsetzen (oder in g(x)):

$f(-3) = -2\cdot(-3)\cdot(-3-2) = (+6)\cdot(-5) = -30 \Rightarrow S_1\,(-3/-30)$

$f(-13) = -2\cdot(-13)\cdot(-13-2) = 26\cdot(-15) = -390 \Rightarrow S_2\,(-13/-390)$

5) a)

$2x^2 - 6x = 0 \quad | :2$

$x^2 - 3x = 0$

$x\cdot(x-3) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 3$ (da $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$)

b)

$f(x) = -1/2x^2 + 8 = 0 \quad | \cdot(-2)$

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm 4$

c)

$f(x) = 3/7\cdot(x^2 - 9) = 0 \quad | \cdot 7/3$

$x^2 - 9 = 0$

$x_{1/2} = \pm 3$

d)

$f(x) = 8/77\cdot(x-3)\cdot(x+5)$

($a\cdot b = 0$ wenn $a = 0$ oder $b = 0$!)

$x_1 = 3$ ($x - 3 = 0$ für $x = 3$) ; $x_2 = -5$ ($x + 5 = 0$ für $x = -5$)

6)

$f(x) = -3 \cdot (x - 4) \cdot (x + 7)$

$= -3 \cdot (x^2 + 7x - 4x - 28)$

$= -3\ (x^2 + 3x - 28)$

$= -3x^2 - 9x + 84$