Lineare Funktionen und Exponentialfunktionen

1) Die folgenden Wertetabellen gehören zu linearen Funktionen oder zu Exponentialfunktionen. Welche Wertetabelle gehört zu einer linearen Funktion und welche zu einer Exponentialfunktion?

a)

x	0	1	2
f(x)	4	6	8

b)

x	0	1	2
f(x)	4	8	16

c)

x	0	1	2
f(x)	1620	1296	1036,8

d)

x	0	1	2
f(x)	1450	1200	950

Wie lauten die Funktionsgleichungen?

2) Es sei $f(x) = b \cdot a^x$ bzw. $y = b \cdot a^x$ die Gleichung der Exponentialfunktion. a ist dabei der Wachstumsfaktor (für $a > 1$) oder Zerfallsfaktor (für $a < 1$ und natürlich $a > 0$) und b der Anfangswert (da $f(0) = b$). Bei Wachstums- oder Zerfallsprozessen kann über den Prozentsatz p der Wachstumsfaktor über $a = 1 + p/100$ bzw. der Zerfallsfaktor über $a = 1 - p/100$ berechnet werden.

Bestimme a für die folgenden Anwendungen:

a) Es gibt eine monatliche Steigerung von 25%.

b) Es gibt jährlich einen Wertverlust von 50%.

c) Der jährliche Zuwachs beträgt 14%.

d) Pro Woche fällt der Kurs um 1,2%.

3) a) a = 0,92. Wie groß ist der monatliche Verlust in Prozent?

b) a = 0,354. Wie groß ist der monatliche Verlust in Prozent?

c) a = 1,04. Wie groß ist die monatliche Zunahme in Prozent?

d) a = 1,385. Wie groß ist die monatliche Zunahme in Prozent?

e) a = 2,55. Wie groß ist die monatliche Zunahme in Prozent?

4) Es werden 5000€ zu 2,5% Zinsen angelegt.

a) Gesucht wird die Gleichung $f(x) = b \cdot a^x$ (x = Zeit in Jahren, f(x) = Kontostand in € nach x Jahren)?

b) Wie hoch wäre der Kontostand nach 4 Jahren bei dieser Anlagen?

5) Eine Maschine kostet 40.000€. Sie verliert pro Jahr 10% an Wert.

a) Gesucht wird die Gleichung $f(x) = b \cdot a^x$ (x = Zeit in Jahren, f(x) =Restwert in € nach x Jahren)?

b) Wie viel ist die Maschine in 5 Jahren Wert?

c) Nach wie vielen Jahren ist sie weniger als 20.000€ Wert?

6) $f(x) = 2000 \cdot 1{,}05^x$

Wie könnte eine Aufgabe lauten, die zu dieser Gleichung führt?

Lösungen:

1) Wenn die Differenzen von zwei aufeinanderfolgenden y-Werten (Funktionswerten) immer gleich sind (vorausgesetzt, die Differenzen der x-Werte sind immer gleich), dann handelt es sich um eine lineare Funktion. Wenn die Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden y-Werten immer gleich sind (vorausgesetzt, die Differenzen der x-Werte sind immer gleich, z.B. jeweils gleich 1, wie im Beispiel), dann handelt es sich um eine Exponentialfunktion.

a)

x	0	1	2
f(x)	4	6	8

Es gilt für die Differenzen der y-Werte: 6 – 4 = 2 und 8 – 6 = 2. Es handelt sich um eine lineare Funktion und da die x-Werte jeweils um 1 ansteigen, ist auch die Steigung der Funktion m = 2, also gleich der Differenz der y-Werte. Wenn die Differenz der x-Werte z.B. jeweils gleich 5 gewesen wären, hätten wir die 2 noch durch 5 teilen müssen, um die Steigung m zu erhalten (allgemein: $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$). Die Steigung gibt an, um welchen Wert y ansteigt oder fällt, wenn x um 1 ansteigt. Der y-Achsenabschnitt ist 4, denn f(0) = 4 (siehe Tabelle).

b)

x	0	1	2
f(x)	4	8	16

8 – 4 = 4 und 16 – 8 = 8, also nicht linear. Wir bestimmen die Quotienten: 8/4 = 2 und 16/8 = 2, also liegt exponentielles Wachstum vor. Da oben x jeweils um 1 ansteigt, haben wir über den Quotienten direkt den Wachstumsfaktor bestimmt: a = 2. Es gilt: a = f(x+1)/f(x). Wenn x jeweils um z.B. 5 angestiegen wäre, hätten wir die 5. Wurzel aus dem Quotienten ziehen müssen, um a zu erhalten.

Damit kennen wir den Wachstumsfaktor a = 2. Es gilt b = 4, denn f(0) = 4: $f(x) = b \cdot a^x = 4 \cdot 2^x$

c)

x	0	1	2
f(x)	1620	1296	1036,8

An den y-Werten fällt gleich auf, dass die Differenzen nicht konstant sein können. Damit handelt es sich hier um eine Exponentialfunktion bzw. um exponentiellen Zerfall (da die Funktionswerte fallen):

a = 1296/1620 = 1036,8/1296 = 0,8. $f(x) = 1620 \cdot 0{,}8^x$.

d)

x	0	1	2
f(x)	1450	1200	950

1200-1450 = -250 und 950 – 1200 = -250. Also eine lineare Funktion. f(x) = -250x + 1450.

Wie allgemein über zwei Punkte eine Geradengleichung bestimmt werden kann, sieht man unter http://mathe-total.de/Analysis-Aufgaben/Untersuchung-linearer-Funktionen.pdf in der Lösung zur Aufgabe 2 und unter http://mathe-total.de/Mittelstufe-Aufgaben/Exponentialfunktionen.pdf ist in der Lösung zur Aufgabe 1 (oder noch allgemeiner in der zur Aufgabe 2) zu sehen, wie über zwei Punkte die Gleichung einer Exponentialfunktion bestimmt werden kann.

2)

a) Es gibt eine monatliche Steigerung von 25%: $a = 1 + p/100 = 1 + 25/100 = 1{,}25$

b) Es gibt jährlich einen Wertverlust von 50%: $a = 1 – p/100 = 1 – 50/100 = 0{,}5$

c) Der jährliche Zuwachs beträgt 14%: $a = 1 + p/100 = 1 + 14/100 = 1{,}14$

d) Pro Woche fällt der Kurs um 1,2%: $a = 1 – p/100 = 1 – 1{,}2/100 = 0{,}988$

3) a) $a = 0{,}92$. $a < 1$, also Zerfall.

$a = 1 – p/100$, damit wäre $p = 100\cdot(1-a) = 100\cdot(1-0{,}92) = 8$, also 8% Verlust pro Monat.

Man hätte auch die Gleichung $a = 1 – p/100$ bzw. $0{,}92 = 1 – p/100$ nach p auflösen können:

$$\begin{aligned} 0{,}92 &= 1 - p/100 && \mid -1 \\ -0{,}08 &= -\, p/100 && \mid \cdot 100 \\ -8 &= -p && \mid :(-1) \\ p &= 8 \end{aligned}$$

b) $a = 0{,}354$. $a < 1$, also Zerfall. $p = 100\cdot(1-a) = 100\cdot(1-0{,}354) = 64{,}6$, also 64,6% Verlust pro Monat.

c) $a = 1{,}04$. $a > 1$, also Wachstum. $p = 100\cdot(a-1) = 100\cdot(1{,}04-1) = 4$, also 4% Wachstum pro Monat.

d) $a = 1{,}385$. Wachstum. $p = 100\cdot(a-1) = 100\cdot(1{,}385-1) = 38{,}5$, also 38,5% Wachstum pro Monat.

e) $a = 2{,}55$. Wachstum. $p = 100\cdot(a-1) = 100\cdot(2{,}55-1) = 155$, also 155% Wachstum pro Monat.

4) Es werden 5000€ zu 2,5% Zinsen angelegt.

a) $f(x) = b \cdot a^x$. $a = 1 + p/100 = 1{,}025$ ($p = 2{,}5$). Anfangswert $b = 5000$ (ohne Einheit). $f(x) = 5000\cdot1{,}025^x$

b) Kontostand nach 4 Jahren: $f(4) = 5000\cdot1{,}025^4 \approx 5519{,}06$, also ca. 5.519,06€.

5) Eine Maschine kostet 40.000€. Sie verliert pro Jahr 10% an Wert.

a) $f(x) = b \cdot a^x$. $a = 1 - p/100 = 0{,}9$ ($p = 10$). Anfangswert $b = 40000$ (ohne Einheit). $f(x) = 40000\cdot0{,}9^x$

b) Die Maschine hat in 5 Jahren folgenden Wert: $f(5) = 40000\cdot0{,}9^5 = 23619{,}6$, also 23.619,60€.

c) Nach wie viel Jahren ist sie weniger als 20.000€ Wert?

Wenn noch kein Logarithmus besprochen wurde und nur nach ganzzahligen Jahren gefragt wird, dann kann man diese Aufgabe über das Berechnen von Funktionswerten lösen. Aus 5b) wissen wir, dass nach 5 Jahren noch ein Wert von 23.619,60€ vorhanden war.

Also müssen es mehr als 5 Jahre sein:

$f(6) = 40000 \cdot 0{,}9^6 = 21257{,}64$
$f(7) = 40000 \cdot 0{,}9^7 = 19131{,}876$

Damit muss man über 6 Jahre warten, damit der Wert auf unter 20.000€ fällt.

Mit dem Logarithmus:

$40000 \cdot 0{,}9^x = 20000$

Wir lösen diese mit dem ‚='-Zeichen, könnten aber auch das ‚<'-Zeichen verwenden.

$$\begin{aligned} 40000 \cdot 0{,}9^x &= 20000 && \mid :40000 \\ 0{,}9^x &= 0{,}5 && \mid \log_{0,9}() \\ x &= \log_{0,9}(0{,}5) \approx 6{,}58 \end{aligned}$$

Also nach ca. 6,58 Jahren ist die Maschine noch 20.000 € Wert, und nach mehr als ca. 6,58 Jahren ist sie dann weniger als 20.000 € Wert.

6) $f(x) = 2000 \cdot 1{,}05^x$

Wie könnte eine Aufgabe lauten, die zu dieser Gleichung führt?

Beispielsweise: Es werden 2000€ zu 5% Zinsen pro Jahr angelegt. Wie lautet die Gleichung, die dem Jahr x den Wert zum Zeitpunkt x in € zuordnet? Einfacher: Wie lautet die Gleichung, so dass f(x) den Kontostand nach x Jahren in € darstellt?